

# Betriebsfestigkeit

schnell verstehen & anwenden!

## Teil 1: statischer Nachweis

---

### Auf den Punkt:

- Bauteile höher Auslasten
  - Plastische Stützzahlen verstehen
  - Hintergründe der FKM Richtlinie oder DIN 743 verstehen
  - Bauteile selbständig statisch auslegen
  - Inkl. praktischer Übungen
-

## **Dr.-Ing. Stefan Einbock**



studierte allgemeinen Maschinenbau an der Hochschule Esslingen und promovierte an der TU Dresden im Bereich der Betriebsfestigkeit.

Das theoretische Wissen zur Betriebsfestigkeit und Zuverlässigkeit vermittelt er in Kooperation mit dem Verein deutscher Ingenieure (VDI) als erfolgreicher Seminarleiter der Seminare „Betriebsfestigkeits-berechnung“ sowie „Bauteile robust auslegen und effizient erproben“. Außerdem hält er regelmäßig Vorträge an Hochschulen.

Er ist bei der Robert Bosch GmbH beschäftigt. Dort leitet er im Geschäftsbereich Gasoline Systems das Kompetenzzentrum Betriebsfestigkeit.

Stefan Einbock

# **BETRIEBSFESTIGKEIT**

**Teil 1: Statischer Nachweis**

**schnelle und einfache Einführung**

Mit

19 Grafiken und

begleitendem Blog <http://einbock-akademie.de/blog>

# VORWORT

Neben dem Leichtbau werden die Methoden der Betriebsfestigkeit vor allem aus wirtschaftlichen Gründen oder der Energieeinsparung eingesetzt. Bauteile können dadurch genauer auf Belastungen und Einsatzzeiten ausgelegt werden. Bei geringstmöglichem Materialeinsatz lassen sich Bauteile stärker auslasten und Tragreserven heben.

Zunehmend wird bereits in frühen Phasen der Produktentwicklung ein rechnerischer Nachweis der Betriebsfestigkeit gefordert. Ingenieure aus Konstruktions- und Entwicklungsabteilungen übernehmen diese Aufgabe mehr und mehr. Simulationsingenieure nutzen die Methoden der Betriebsfestigkeit immer häufiger zur Interpretation der Berechnungsergebnisse, da vorhandene Grenzwerte stärker hinterfragt werden. Außerdem kommt Simulationsingenieuren neben der Berechnung vermehrt die Aufgabe der Interpretation von Spannungen zu.

Die Betriebsfestigkeit ist ein empirisches Fachgebiet. Daraus resultieren eine Vielzahl an Vorschlägen, Hypothesen und Berechnungskonzepten. In der vorhandenen Fachliteratur fehlt häufig eine Empfehlung für die Wahl der richtigen Methoden. Auch praxisorientierte Anleitungen zur Anwendung der Methoden finden sich nur selten. Richtlinien geben zwar eine praxisorientierte Anleitung zur Berechnung. Hintergründe werden allerdings kaum behandelt.

Eine Einarbeitung in das Fachgebiet der Betriebsfestigkeit ist somit schwierig und schreckt viele in der Industrie tätige Ingenieure von der Einarbeitung in dieses Fachgebiet ab.

Im vorliegenden eBook des statischen Festigkeitsnachweises haben wir für Sie übersichtlich die Methoden des statischen Festigkeitsnachweises zusammengestellt. Im Kapitel „auf den Punkt“ sind die Kernaussagen zusammengefasst. Außerdem können Sie an praktischen Übungen am Ende des Kapitels das Gelernte direkt anwenden.

Dieses eBook soll die gegenwärtige Lücke dadurch schließen, dass es

- Ihnen einen effizienten Einstieg in die Betriebsfestigkeit (statischer Festigkeitsnachweis) aufzeigt,
- Sich an der modernen FKM Richtlinie [1] orientiert und Ihnen dazu die wichtigsten Hintergründe liefert,
- die Methoden um Werkstoff- und Berechnungsdaten ergänzt,
- Sie in die Lage versetzt Ihre Bauteile höher auszulasten, indem Sie einen statischen Festigkeitsnachweis nach dem Stand der Technik führen und gezielt plastische Dehnungen zulassen,
- Ihnen praxisorientierte Übungen zur Vertiefung des Gelernten liefert

und Sie eine Unterlage an die Hand bekommen, mit der Sie Ihre Konstruktionen statisch auslegen können.

Stefan Einbock

Vaihingen Enz, Winter 2016

# Inhaltsverzeichnis

1	Kritik willkommen .....	7
2	Tipps zur effizienten Einarbeitung in die Betriebsfestigkeit .....	8
3	Grundlagen .....	10
3.1	Übersicht über den statischen Nachweis .....	10
3.2	Werkstoffverhalten .....	12
4	Berechnung der Beanspruchungen (Spannungen).....	16
4.1	Linearelastisches Werkstoffverhalten.....	16
4.2	Mehrachsige Beanspruchung.....	20
4.3	Elastisch-plastisches Werkstoffverhalten .....	22
5	Berechnung der Beanspruchbarkeit (ertragbare Spannungen) .....	24
5.1	Werkstoffeinfluss.....	24
5.2	Temperatureinfluss .....	25
5.3	Kerbeeinfluss.....	26
6	Berechnung der Sicherheit (zulässige Spannungen) .....	29
7	Auf den Punkt.....	31
8	Wichtige Formeln.....	32
9	Übungen .....	33
10	Lösungen .....	34
11	Formelzeichen .....	39
13	Literaturverzeichnis .....	41
14	Index .....	43
15	Anhang Formzahlen (Auszug).....	45

# 1 KRITIK WILLKOMMEN

Dieses **eBook gefällt** Ihnen? Dann freue ich mich über eine Motivation für mein Tun und eine ehrliche Rückmeldung/einen ehrlichen Kommentar auf meiner Homepage (<http://einbock-akademie.de/>), per Mail ([kontakt@einbock-akademie.de](mailto:kontakt@einbock-akademie.de)), oder ein gefällt mir auf meiner Facebook Seite <https://www.facebook.com/EinbockAkademie/>.

Wenn Sie dieses **eBook weiterempfehlen** oder weiterverteilen möchten, können Sie dies sehr gerne tun. Bitte teilen Sie dazu den Link auf das eBook z.B. über Facebook, Twitter oder Ihre Homepage.

Haben Sie einen **Fehler gefunden**, der sich trotz größt möglicher Sorgfalt eingeschlichen hat? Bitte schreiben Sie mir eine kurze Email mit dem Hinweis auf den Fehler an diese Adresse: [kontakt@einbock-akademie.de](mailto:kontakt@einbock-akademie.de).

Möchten Sie **Kritik äußern**? Bitte schreiben Sie mir dazu eine Email mit dem Betreff: *Rezension* an die oben angegebene Email Adresse. Über jedes faire Feedback bin ich dankbar!

Fallen Ihnen **weitere Themen** ein, die sie außerdem gerne in einer künftigen Auflage behandelt hätten? Da dieses Buch von Ingenieuren für Ingenieure geschrieben ist, möchte ich es gerne in Diskussion mit Ihnen weiterentwickeln. Bitte senden Sie einfach Ihre Themenwünsche per Email an mich. Ich werde diese sammeln. Evtl. werde ich diese dann in meinem Blog veröffentlichen: <http://einbock-akademie.de/blog>.  
oder in einer künftigen Auflage berücksichtigen.

**Als kleines Dankeschön erhalten Sie von mir zusätzliche Übungsaufgaben für die Betriebsfestigkeit. Bitte senden Sie mir einfach eine kurze Email und ich sende Ihnen ein PDF zu.**

## 2 TIPPS ZUR EFFIZIENTEN EINARBEITUNG IN DIE BETRIEBSFESTIGKEIT

Für viele wird die Einarbeitung in die Betriebsfestigkeit parallel zur Arbeit erfolgen. Deshalb ist es wichtig, diese so effizient wie möglich zu gestalten. Mit den folgenden sieben überraschend einfachen Tipps steigern Sie Ihre Lerneffizienz dramatisch!

### 1) **Legen Sie Ziele fest**

Setzen Sie sich konkrete Ziele, die Ihnen einen direkten Nutzen bringen. Ideal ist es, wenn Sie z. B. formulieren: „Für das Bauteil meiner Konstruktion werde ich zum xx.xx.xxxx die Sicherheitsfaktoren berechnen.“ Halten Sie diese Ziele schriftlich mit einem Zieltermin fest. Dies gibt Ihnen einen Fokus und motiviert, da erreichte Ziele abgehakt werden können.

### 2) **Verstehen Sie den Gesamtzusammenhang**

Wenn Sie den Gesamtzusammenhang verstehen, hilft es Ihnen, das Gelernte in eine Struktur einzusortieren. Sie können sich dadurch besser fokussieren. Orientieren Sie sich beim Gesamtzusammenhang an der Gliederung dieses Buches. Die Lernzeit verkürzt sich und das Verständnis steigt.

### 3) **Fertigen Sie Skizzen an**

Versuchen Sie das Gelernte so einfach wie möglich in Skizzen festzuhalten. Je einfacher die Skizzen werden, umso besser haben Sie den Zusammenhang verstanden. Skizzen können auch Mind Maps sein, oder kurze Skizzen die den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung über Blockschaltbilder darstellen.

### 4) **Setzen sie sich feste Zeiten**

Nehmen Sie sich konkrete Zeiten zum Lernen/Einarbeiten vor. Im beruflichen Alltag bieten sich hier oftmals die Wochentage Donnerstag oder Freitag an. Blocken Sie sich an einem dieser Tage min. zwei Stunden und nutzen diese für die Einarbeitung (das sind „nur“ 5 % Ihrer zur Verfügung stehenden Zeit).

### 5) **Lassen Sie sich nicht ablenken**

Dies bedeutet, dass Outlook geschlossen und das Telefon stumm geschaltet ist. Ideal ist es, wenn Sie im Homeoffice oder in einem abgeschlossenen Raum arbeiten können. Der Fokus auf die eine Aufgabe steigt.

### 6) **Lehren Sie**

Erklären Sie Ihren Kollegen und Vorgesetzten Ihr Vorgehen und Ihre Erfahrungen. Je einfacher (und kürzer) Sie erklären und die Rückfragen Ihrer Kollegen beantworten können, umso größer ist ihr Verständnis. Das müssen Sie

üben. Können Sie eine Frage nicht beantworten, zeigt dies eine Lücke auf, die Sie durch zusätzliches Studium schließen können. Sie werden merken, dass Ihr Ansehen bei Ihren Kollegen steigt. Sie erreichen schrittweise einen Expertenstatus.

**7) Belohnen Sie sich**

Belohnen Sie sich nach erreichten Zielen. Dies können auch Kleinigkeiten sein, z. B. ein früherer Feierabend, ein Kaffee mit den Kollegen oder etwas Zeit mit der Familie. Wichtig ist, dass Sie das Gefühl haben, sich etwas Gutes zu tun. Das motiviert!

## 3 GRUNDLAGEN

Unabhängig von der Art der Belastung (ob schwingend oder statisch) muss der statische Festigkeitsnachweis geführt werden. Dieser dient der Absicherung des Bauteils gegen Bruch und unzulässige plastische Verformungen.

Sind die Temperaturen größer als 40% der Schmelztemperatur (in Kelvin) des Werkstoffes, muss noch ein Zeitstands-/oder Kriechnachweis geführt werden. Dieser Nachweis wird in diesem Buch nicht behandelt.

Es wird generell unterschieden zwischen Belastungen und Beanspruchungen.

**Belastungen** wirken von außen auf das Bauteil ein. Typischerweise sind dies Kräfte, Momente, Temperaturen, Drehzahlen,....

**Beanspruchungen** sind die Reaktionen des Bauteils auf die Belastung. Mechanische Beanspruchungen sind mechanische Spannungen und Dehnungen. Beanspruchungen sind damit von der Belastung und der Bauteilgeometrie abhängig. Der Festigkeitsnachweis wird immer auf Basis von Beanspruchungen geführt. Die Ermittlung der Beanspruchungen

- kann analytisch mit den Grundgleichungen der technischen Mechanik,
- numerisch über Simulationswerkzeuge wie die FEM und
- experimentell durch z.B. spannungsoptische Messungen erfolgen.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Vorgehensweise des Festigkeitsnachweises (Kapitel 3.1) und schafft die Grundlagen des Werkstoffverhaltens (Kapitel 3.2).

### 3.1 ÜBERSICHT ÜBER DEN STATISCHEN NACHWEIS

Der Festigkeitsnachweis erfolgt immer in drei Schritten, nach denen dieses Buch gliedert ist (vgl. Abbildung 1):

- Ermittlung der Beanspruchungen im Bauteil (vgl. Kapitel 4)  
das sind die Reaktionen des Bauteils auf die Belastungen in Form von mechanischen Spannungen,
- Bestimmung der Beanspruchbarkeit (vgl. Kapitel 5)  
das ist die maximale Spannung in einem Festkörper, bevor es zu einem Versagen kommt,
- Berechnung der Sicherheit gegen Versagen (vgl. Kapitel 6)  
das ist das Verhältnis aus Beanspruchung und Beanspruchbarkeit (also der Abstand zwischen Beanspruchung und Beanspruchbarkeit).



## 3.2 WERKSTOFFVERHALTEN

Üblicherweise wird das Werkstoffverhalten unter zügiger Belastung gemessen. Dazu werden zylindrische Probekörper (z. B. genormt in DIN 50 125) mit der Querschnittsfläche  $A$  und der Länge  $L_0$  in einer Zugprüfmaschine durch eine Zugkraft  $F$  rein axial belastet (vgl. Abbildung 2).

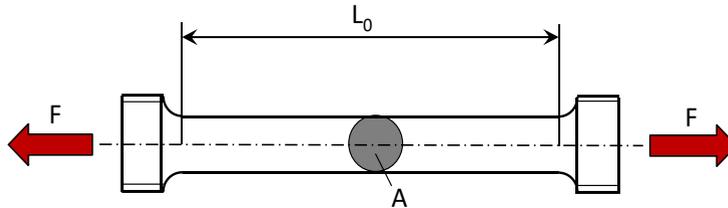


ABBILDUNG 2: ZUGPROBE ZUR ERMITTLUNG STATISCHER WERKSTOFFDATEN

Als Reaktion auf die Kraft ergeben sich innere Beanspruchungen: Spannung

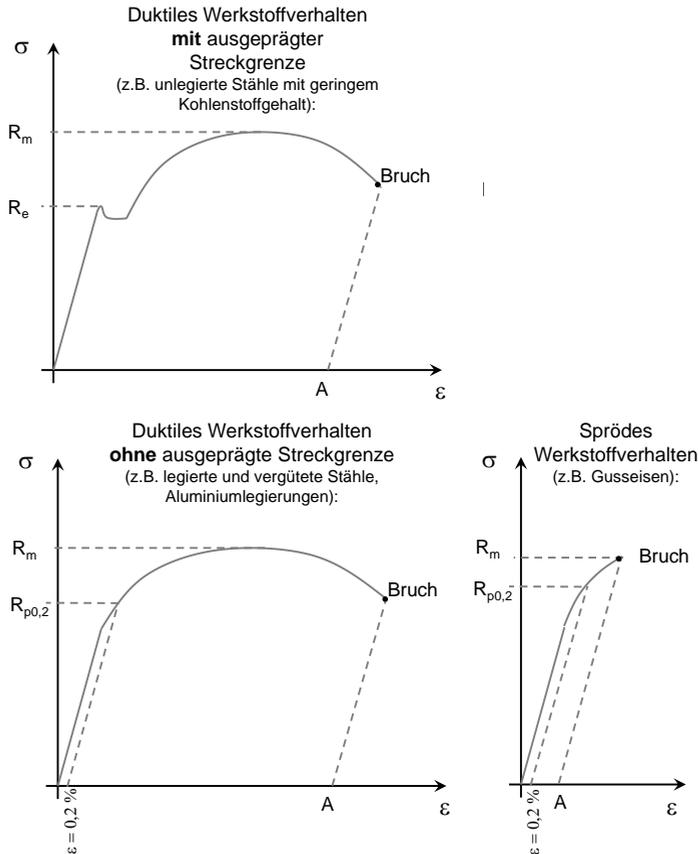
$$\sigma = F / A \text{ in N/mm}^2 \text{ oder MPa} \quad (1)$$

Dehnung

$$\varepsilon = \Delta L / L_0 \text{ in \%} \quad (2)$$

Im Rahmen eines Zugversuches (z.B. nach DIN EN 10 002) wird die Zugkraft bis zum Bruch des Probekörpers gesteigert. Es werden die Zugkraft  $F$  und die Längenänderung  $\Delta L$  des Probekörpers gemessen und in Spannung und Dehnung umgerechnet.

Das Ergebnis ist das Werkstoffverhalten in Form des zügigen Spannungs-Dehnungs-Diagramms. Abbildung 3 zeigt dies schematisch für duktile Werkstoffe mit und ohne ausgeprägter Streckgrenze sowie für spröde Werkstoffe. Wichtige, für den Festigkeitsnachweis relevante Kennwerte sind nachfolgend aufgelistet.



**ABBILDUNG 3: SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DER SPANNUNGS-DEHNUNGS-DIAGRAMME**

### Die Streckgrenze $R_e$ oder die Ersatzstreckgrenze $R_{p0,2}$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Der Einfachheit halber wird nachfolgend die Streckgrenze  $R_e$  als Synonym für  $R_{p0,2}$  verwendet

Liegt die Beanspruchung des Bauteiles unterhalb der Streckgrenze, verhält sich der Werkstoff nach dem Hookeschen Gesetz linear-elastisch. Eine bleibende Verformung des Werkstoffes tritt nicht auf. Spannung  $\sigma$  und Dehnung  $\varepsilon$  hängen über den E-Modul  $E$  voneinander ab:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3)$$

Typische Werte für den E-Modul sind nach [1]:

Aluminiumlegierungen :	70 000 N/mm <sup>2</sup>
Stähle:	210 000 N/mm <sup>2</sup>
Eisengusswerkstoffe:	180 000 .. 190 000 N/mm <sup>2</sup>

Ursächlich für dieses Verhalten ist die Gitterdehnung. Die Atome werden ein wenig aus ihrer ursprünglichen Lage verschoben, sobald eine äußere Kraft anliegt. Wird diese Kraft wieder auf null reduziert, kehren die Atome in Ihre Ausgangslage zurück. Die Verformung ist elastisch. Als Analogie kann man sich das Verhalten einer Feder denken.

Typische Werte für die Streckgrenze können Werkstoffkatalogen entnommen werden. Siehe auch <http://einbock-akademie.de/download> für eine Auswahl von Datenbanken.

Vereinfachend wird teilweise mit linearelastisch idealplastischem Werkstoffverhalten gearbeitet. Dabei wird angenommen, dass sich der Werkstoff bis zur Höhe der Streckgrenze linear-elastisch verhält und danach keine weitere Verfestigung mehr erfährt. Diese Annahme ist für spröde Werkstoffe nicht gültig. Vgl. dazu die Abbildung 4.

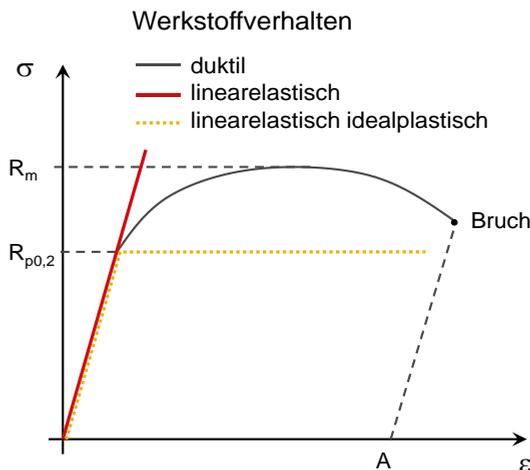


ABBILDUNG 4: LINEARELASTISCH-IDEALPLASTISCHES WERKSTOFFVERHALTEN

### **Die Zugfestigkeit $R_m$**

Überschreiten die Spannungen die Streckgrenze beginnt der Werkstoff zu plastifizieren. Ein Entlasten des Werkstoffes führt zu einer bleibenden, plastischen Verformung. Das Erreichen der Zugfestigkeit  $R_m$  markiert die maximal ertragbare Spannung.

Versetzungsbewegungen sind Ursächlich für die Plastifizierung. So ist es energetisch günstiger, einzelne Versetzungen (Defekte im Kristallgefüge) als das gesamte Gefüge zu bewegen. Da die Versetzungsbewegung irreversibel ist, verformt sich der Körper bleibend (plastisch). Dazu eine Analogie. Es ist einfacher, eine Falte durch einen Teppich zu bewegen (und damit den gesamten Teppich ein Stück zu bewegen), als den gesamten Teppich zeitgleich zu verschieben.

Typische Werte für die Zugfestigkeit können Werkstoffkatalogen entnommen werden. In <http://einbock-akademie.de/download> finden Sie eine Auswahl von Datenbanken für einen kostenlosen Download der Werkstoffdaten.

### **Die Bruchdehnung $A$**

Die gesamte bis zum Bruch ertragbare Dehnung wird als Bruchdehnung bezeichnet. Sie ist ein wesentliches Merkmal zur Unterscheidung zwischen duktilen, d.h. verformungsfähigen und spröden Werkstoffen. Liegt die Bruchdehnung  $A > 6\%$  spricht man üblicherweise von duktilen Werkstoffen [1], liegt sie darunter von spröden Werkstoffen. Duktile Werkstoffe versagen üblicherweise durch einen duktilen Gewaltbruch. Dieser zeichnet sich durch sein wabenförmiges Aussehen der Bruchfläche aus. Bei spröden Werkstoffen erfolgt das Versagen durch Spröbruch. Die Bruchfläche hat ein kristallines Erscheinungsbild.

## 4 BERECHNUNG DER BEANSPRUCHUNGEN (SPANNUNGEN)

Die Beanspruchung (Spannungen und Dehnungen) im Werkstoff wird für den statischen Nachweis üblicherweise linearelastisch nach Gleichung (3) berechnet. Allgemein gilt, dass die Beanspruchung (Spannung) von der Belastung, dem Werkstoffverhalten und der Geometrie abhängt. Für den ungekerbten zylindrischen Stab unter Zugbelastung hängt die Spannung (Beanspruchung) von der Kraft  $F$  (Belastung) und der Querschnittsfläche  $A$  (Geometrie) ab, siehe Gleichung (1). Bauteile weisen üblicherweise noch Kerben wie beispielsweise eine Verjüngung des Querschnitts, Bohrungen oder Einschnitte auf. Daraus folgt der Kerbeinfluss (vgl. Abbildung 1).

Der Festigkeitsnachweis wird auf Basis von linearelastisch berechneten Spannungen (siehe Kapitel 4.1) geführt. Bei der Berechnung elastisch-plastischer Spannungen (Kapitel 4.2) muss das Werkstoffverhalten berücksichtigt werden.

### 4.1 LINEARELASTISCHES WERKSTOFFVERHALTEN

Liegen die Spannungen unterhalb der Streckgrenze verformt sich der Werkstoff rein elastisch. Bei einer Entlastung des Bauteils treten keine bleibenden, d.h. plastischen Verformungen auf. In diesem Fall können die Spannungen im Bauteil analytisch berechnet werden. Dazu werden zuerst die Nennspannungen und im zweiten Schritt die Kerbspannungen berechnet.

**Nennspannungen**  $\sigma_{nenn}$  berücksichtigen den Einfluss der Belastung und der Geometrie, vernachlässigen aber die Kerbeinflüsse. Es werden vier Grundbelastungsfälle

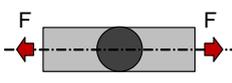
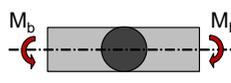
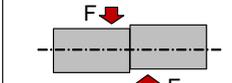
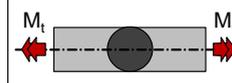
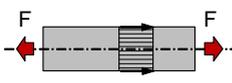
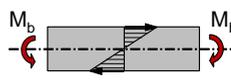
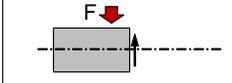
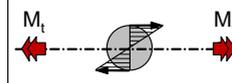
Zug / Druck	Biegung	Schub	Torsion
			
			
$\sigma_{nenn,z} = F/A$	$\sigma_{nenn,b} = M_b / W_b$	$\tau_{nenn,s} = F/A$	$\tau_{nenn,t} = M_t / W_t$

ABBILDUNG 5: GRUNDBELASTUNGSFÄLLE

unterschieden. Zug/Druck, Biegung, Schub und Torsion. Basierend auf diesen Grundbelastungsfällen werden die Nennspannungen nach den in Abbildung 5 angegebenen Gleichungen berechnet. Bei dem Grundbelastungsfall Zug/Druck und Schub erfolgt die Belastung durch die Kraft  $F$ . Bei der Biegung durch das Biegemoment  $M_b$  und bei der Torsion durch das Torsionsmoment  $M_t$ . Die Geometrie wird bei Zug/Druck und Schub über die Querschnittsfläche  $A$ , bei Biegung über das Widerstandsmoment gegen Biegung  $W_b$  und bei Torsion über das Widerstandsmoment gegen Torsion  $W_t$  berücksichtigt. Abbildung 6 fasst die Gleichungen der Widerstandsmomente ausgewählter Querschnitte zusammen.

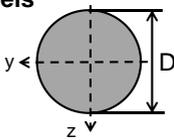
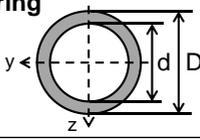
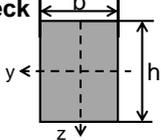
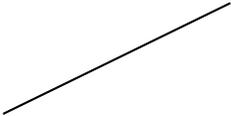
Geometrie	Widerstandsmoment gegen Biegung $W_b$	Widerstandsmoment gegen Torsion $W_t$
<b>Vollkreis</b> 	$W_{by} = W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot D^3$	$W_{ty} = W_{tz} = \frac{\pi}{16} \cdot D^3$
<b>Kreisring</b> 	$W_{by} = W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$	$W_{ty} = W_{tz} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
<b>Rechteck</b> 	$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$	

ABBILDUNG 6: WIDERSTANDSMOMENTE AUSGEWÄHLTER QUERSCHNITTE

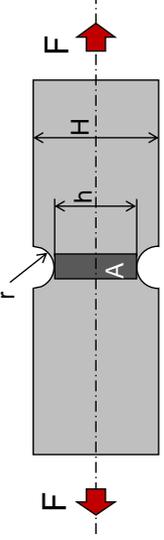
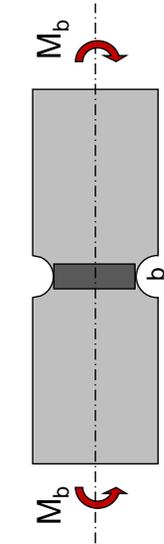
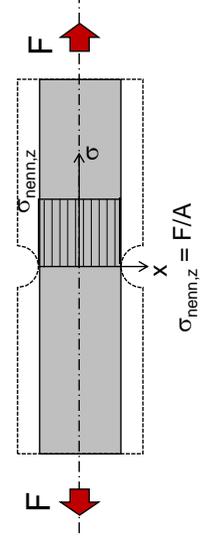
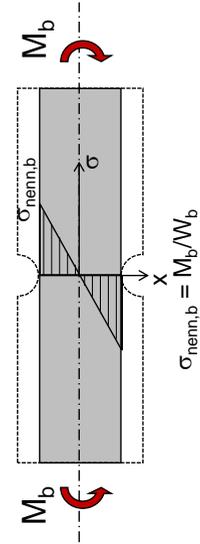
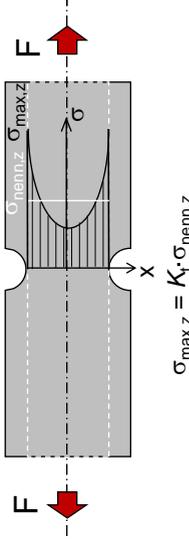
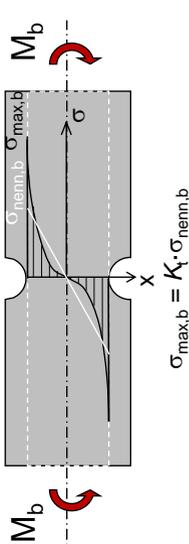
einbock-akademie.de	Zug / Druck		Biegung	
Belastung				
Nennspannung	 $\sigma_{\text{nenn,z}} = F/A$	 $\sigma_{\text{nenn,b}} = M_b/W_b$		
Kerbspannung	 $\sigma_{\text{max,z}} = K_t \cdot \sigma_{\text{nenn,z}}$	 $\sigma_{\text{max,b}} = K_t \cdot \sigma_{\text{nenn,b}}$		
Formzahl $K_t$	$K_t = 3,065 - 3,37 \cdot \frac{2r}{H} + 0,647 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^2 + 0,658 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^3$	$K_t = 3,065 - 6,269 \cdot \frac{2r}{H} + 7,015 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^2 - 2,812 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^3$		

ABBILDUNG 7: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN NENN- UND KERBSpannung

**Kerbspannungen**  $\sigma_{max}$  resultieren z.B. aus Verjüngungen des Bauteils. Diese Verjüngungen (Kerben) stören den gleichmäßigen Kraftfluss im Bauteil und führen zu einer Spannungskonzentration in der Kerbe. D.h. sie sind um Formzahl  $K_t$  gegenüber den Nennspannungen erhöht. Es gilt üblicherweise  $K_t = 1,5..5$ . In Abbildung 7 ist für die Fälle Zug/Druck und Biegung der Zusammenhang zwischen Nennspannung und Kerbspannung dargestellt. Bei der Berechnung der Kerbspannungen geht man nach Abbildung 7 in zwei Schritten vor:

- 1) Berechnung der Nennspannungen  $\sigma_{nenn}$  unter Vernachlässigung der Kerbe
- 2) Berechnung der Kerbspannungen  $\sigma_{max}$  mit Hilfe der Formzahlen nach Abbildung 7:

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \quad (4)$$

Bei der Formzahl handelt es sich um eine von der Geometrie und Belastung abhängige Größe. Werte für die Formzahlen können Formzahldiagrammen entnommen werden (z.B. [2] oder auf der [Homepage der Hochschule Esslingen](#)). Für Zug/Druck und Biegung gelten die in Abbildung 7 angegebenen Formeln.

Alternativ zur vorgestellten Berechnung von Kerbspannungen über den analytischen Weg, können diese auch mittels FEM berechnet werden. Bei linear-elastischer Berechnung ist das Ergebnis der FEM direkt die Kerbspannung. Ausgewertet werden dann üblicherweise für duktile Werkstoffe die Vergleichsspannung nach von Mises und für spröde Werkstoffe die erste Hauptspannung.

$$\sigma_{max} = \sigma_{FEM} \quad (5)$$

**Der Festigkeitsnachweis wird immer mit der Kerbspannung geführt.**

## 4.2 MEHRACHSIGE BEANSPRUCHUNG

Alle Werkstoffkennwerte wie Zugfestigkeit, E-Modul und Streckgrenze sind Kennwerte, die unter einachsiger Beanspruchung ermittelt wurden. Es lagen auf Grund der zylindrischen, ungekerbten Probenform und der axialen Kraft nur Zugspannungen vor.

Bauteile unterscheiden sich im Allgemeinen von diesen Proben. Sie weisen Kerben auf, werden durch nicht zentrisch belastet, evtl. auch durch mehrere Lasten. Dies führt im Bauteil zu einer mehrachsigen Beanspruchung. Es liegt also an der kritischen Stelle im Bauteil nicht mehr nur ein Beanspruchungszustand basierend auf einem der in Abbildung 5 dargestellten Grundbelastungsfälle vor, sondern eine beliebige Kombination.

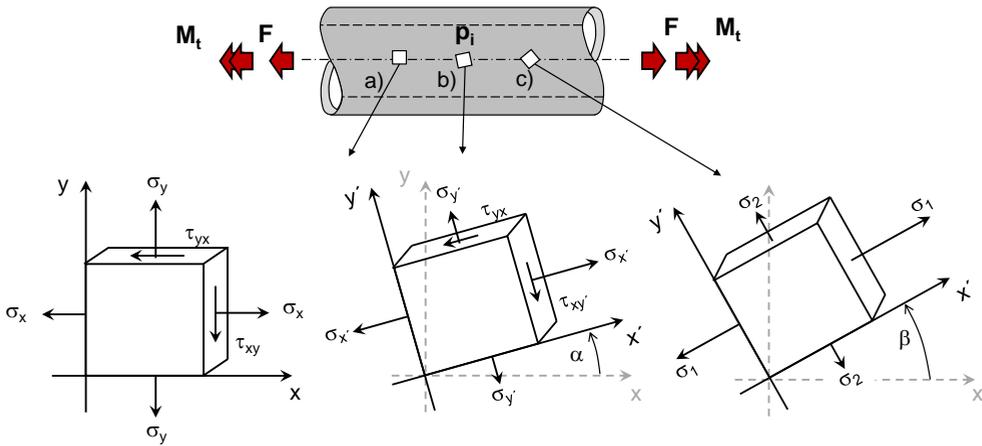


ABBILDUNG 8: SPANNUNGSZUSTAND ABHÄNGIG VON DER SCHNITTEBENE

In Abbildung 8 ist dies für ein Rohr dargestellt, das durch Innendruck  $p_i$ , ein Torsionsmoment  $M_t$  und die Kraft  $F$  belastet ist. Es wird an zwei Stellen (a), b) und c)) der Beanspruchungszustand ermittelt. Wobei sich die Stellen dadurch voneinander unterscheiden, dass der Beanspruchungszustand in unterschiedlichen Schnittebenen (Winkeln) bestimmt wurde. Es zeigt sich, dass dieser deutlich von dem einachsigen Spannungszustand abweicht und eine Überlagerung von Normal- und Schubspannungen darstellt. Außerdem sind die Spannungen abhängig von der Schnittebene. In

einer bestimmten Ebene (Winkel  $\beta$ ) verschwinden die Schubspannungen (Abbildung 8 c)). Es liegen nur noch Normalspannungen vor, die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .

Um einen solchen komplexen mehrachsigen Spannungszustand mit den einachsigen Werkstoffkennwerten vergleichen zu können, werden Festigkeitshypothesen genutzt. Diese rechnen einen mehrachsigen Spannungszustand in einen gleichwertigen einachsigen Spannungszustand um. Dazu wird aus den Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  oder im Falle von Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  eine Vergleichsspannung  $\sigma_V$  berechnet. Diese Vergleichsspannung wird dann mit dem Festigkeitskennwert verglichen.

Abhängig von der Duktilität des Werkstoffes existieren verschiedene Festigkeitshypothesen. Dies ist die Gestaltänderungsenergiehypothese  $\sigma_{GEH}$  für duktile Werkstoffe

$$\begin{aligned}\sigma_{V,GEH} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}\end{aligned}\quad (6)$$

und die Normalspannungshypothese  $\sigma_{NH}$  für spröde Werkstoffe:

$$\sigma_{V,NH} = \text{MAX}(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3).\quad (7)$$

Diese werden nach der FKM Richtlinie [3] abhängig von der Duktilität des Werkstoffes durch die Konstante  $q$  (siehe Tabelle 1) überlagert (genauer gesagt die Auslastungsgrade  $a$ ). Für duktile Werkstoffe gilt  $q = 0$ , damit gilt die Gestaltänderungsenergiehypothese und für spröde Werkstoffe wie Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL) gilt  $q = 1$  und damit die Normalspannungshypothese:

$$\sigma_V = q \cdot \sigma_{V,NH} + (1 - q) \cdot \sigma_{V,GEH}.\quad (8)$$

Tabelle 1: Werte für Konstante  $q$

Werkstoff	Stahl, Aluminiumknetlegierung	Gusseisen mit Kugelgraphit GJS	Temperguss (GJM), Aluminiumguss	Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL)
$q$	0	0,264	0,544	1

### 4.3 ELASTISCH-PLASTISCHES WERKSTOFFVERHALTEN

Liegen die Spannungen oberhalb der Streckgrenze  $Re$  tritt bei duktilen Bauteilen im Kerbbereich Fließen ein. Der Werkstoff verformt sich plastisch. Bei einer Entlastung des Werkstoffes sind Teile des Bauteils bleibend verformt. Während der Fließvorgänge verändert sich der Spannungsverlauf in der Kerbe.

Abbildung 9 zeigt dies schematisch im rechten Bild. Darin führt die Belastung (Kraft  $F$ ) in dem dargestellten Bauteil zur Spannung  $\sigma_{max}$  in der Kerbe, wenn plastische Verformungen ignoriert werden. D. h. es wird linearelastisches Werkstoffverhalten angenommen. Es ergibt sich die rote Spannungsverteilung im rechten Bild der Abbildung 9. Die Spannung in der Kerbe berechnet sich analog Gleichung (4):

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn}$$

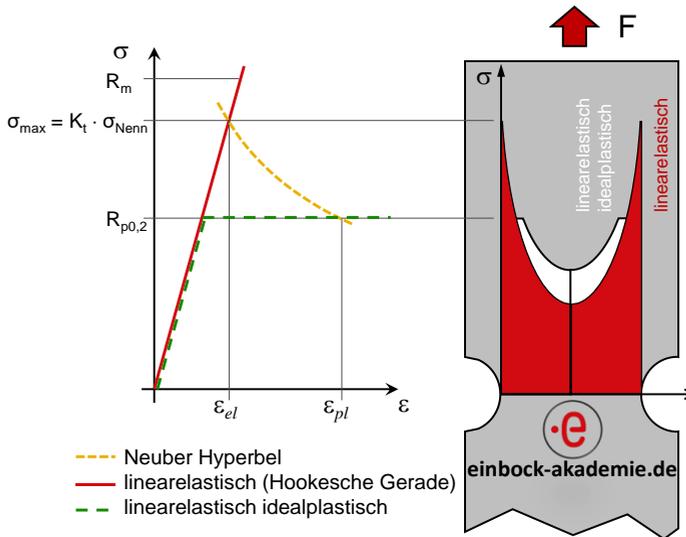
Liegt die Spannung  $\sigma_{max}$  deutlich oberhalb der Streckgrenze müssen die Plastifizierungen berücksichtigt werden, um den realen Spannungsverlauf zu berechnen. Zur Berücksichtigung der Plastifizierungen wird linearelastisch-idealplastisches Werkstoffverhalten angenommen. D.h. der Werkstoff verfestigt oberhalb der Streckgrenze nicht weiter (die maximale Kerbspannung also nicht größer wird als die Streckgrenze  $\sigma_{max} = Re$ ), sondern fließt nur (also die Dehnungen zunehmen). Vgl. dazu das linke Diagramm in Abbildung 9. Für den Spannungsverlauf gilt dann die weisse Spannungsverteilung in Abbildung 9 (rechtes Bild). Gegenüber dem linearelastischen Werkstoffverhalten werden im Kerbbereich Spannungsspitzen abgebaut (durch die Streckgrenze begrenzt). Weiter von der Kerbe entfernte Bereiche werden höher beansprucht. Hier steigen die Spannungen. Diese Bereiche „stützen“ die hoch belasteten Kerbbereiche. Allerdings steigen die Dehnungen deutlich an.

Der exakte Verlauf der Spannungen ist mittels FEM bestimmbar. Der Aufwand ist jedoch hoch, weil nur schrittweise (z.B. mittels Solver oder iterativ) lösbar.

Meist interessieren die Beanspruchungen im Kerbgrund. Hierfür bietet Neuber [4] ein einfaches Verfahren zur analytischen Berechnung der Spannungen und Dehnungen an. Im linken Bild der Abbildung 9 ist das Verfahren durch die Neuber-Hyperbel illustriert. Nach Neuber [4] ist das Produkt aus Spannung und Dehnung bei linearelastischem Werkstoffverhalten gleich dem Produkt aus Spannung und Dehnung bei elastisch – plastischem Werkstoffverhalten. Im Beispiel nach Abbildung 9 gilt damit:

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{el} = Re \cdot \varepsilon_{pl} \quad (9)$$

*linearelast. Werkstoffverhalten = elastisch plast. Werkstoffverhalten*



**ABBILDUNG 9: SPANNUNGSVERLAUF BEI ÜBERELASTISCHER BEANSPRUCHUNG**

Im linken Teil der Gleichung hängen die Spannung  $\sigma_{max}$  und die Dehnung  $\varepsilon_{el}$  nach Gleichung (3) über den E-Modul zusammen:

$$\sigma_{max} = E \cdot \varepsilon_{el} \quad (10)$$

Durch einsetzen von Gleichung (10) in Gleichung (9) ergibt sich

$$\sigma_{max} \cdot \frac{\sigma_{max}}{E} = Re \cdot \varepsilon_{pl} \quad (11)$$

$$\frac{(\sigma_{max})^2}{E} = Re \cdot \varepsilon_{pl}$$

Danach hängt die im Kerbgrund auftretende plastische Dehnung  $\varepsilon_{pl}$  direkt von der linearelastisch berechneten Spannung  $\sigma_{max}$  und dem E-Modul  $E$  ab.

Die plastische Dehnung  $\varepsilon_{pl}$  im Kerbgrund ist damit einfach analytisch berechenbar. Ertragbare plastische Dehnungen werden im Kapitel 5 in Tabelle 4 zusammengefasst.

## 5 BERECHNUNG DER BEANSPRUCHBARKEIT (ERTRAGBARE SPANNUNGEN)

Die Beanspruchbarkeit ist die vom Bauteil maximal ertragbare Beanspruchung, bevor es zum Versagen kommt. Es ist die ertragbare Spannung  $\sigma_{ert}$ . Ein Bauteil kann durch Fließen oder Bruch versagen. Deswegen wird für beide Fälle einen Kennwert bestimmt (siehe Gleichungen (12) und (13)).

Die ertragbaren Spannungen hängen neben

- dem Werkstoff (Festigkeitskennwerte  $Re$ ,  $Rm$  aus Kapitel 5.1) auch von
- den Umgebungsbedingungen (vgl. den Temperatureinfluss  $n_T$  nach Kapitel 5.2) und
- der Geometrie (siehe Kerbeinfluss  $n_{pl}$  nach Kapitel 5.3) ab:

$$\sigma_{ert,Flie\beta en} = Re \cdot n_{pl} \cdot n_T \quad (12)$$

$$\sigma_{ert,Bruch} = Rm \cdot n_T. \quad (13)$$

Tabelle 2 fasst die Kennwerte noch übersichtlich zusammen.

**TABELLE 2: BEANSPRUCHBARKEITEN (ALLGEMEIN)**

Beanspruchbarkeit	Duktiler Werkstoff ( $A > 6\%$ )	Spröder Werkstoff ( $A < 6\%$ )
Gegen Fließen $\sigma_{ert,Flie\beta en}$	$Re \cdot n_{pl} \cdot n_T$	$Re \cdot n_T$
Gegen Bruch $\sigma_{ert,Bruch}$	$Rm \cdot n_T$	

### 5.1 WERKSTOFFEINFLUSS

Der Werkstoffeinfluss wird über den Zugversuch ermittelt. Die relevanten Werkstoffkennwerte sind die Zugfestigkeit  $Rm$  und die Streckgrenze  $Re$  (vgl. Abbildung 3). Beide Werkstoffkennwerte werden unabhängig von der Belastungsart (Zug/Druck, Biegung, Schub oder Torsion) verwendet. Eine Auslegung von Bauteilen erfolgt immer gegen Fließen und Bruch. Erreichen die Kerbspannungen die Streckgrenze  $Re$ , muss mit unzulässigen Verformungen des Bauteils gerechnet werden. Überschreiten die Kerbspannungen die Zugfestigkeit  $Rm$ , droht der Bruch des Bauteils.

## 5.2 TEMPERATUREINFLUSS

Bei Temperaturen oberhalb der Raumtemperatur kann es zu einem Abfall der Werkstoffkennwerte kommen. Der Werkstoff wird duktiler. Sind die Temperaturen gegenüber der Raumtemperatur erniedrigt, steigen die Festigkeitskennwerte. Der Werkstoff beginnt zu verspröden und Kerbeinflüsse nehmen zu. Werden die Temperaturen stark erhöht, droht der Werkstoff zu kriechen. Das Phänomen des Kriechens wird hier nicht behandelt.

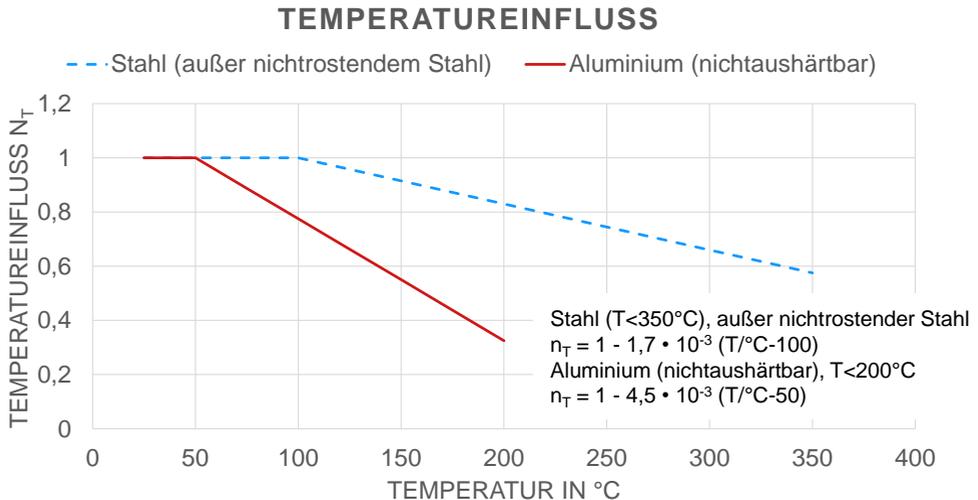
Nach der FKM-Richtlinie [1] beginnt der Festigkeitsabfall bei Stählen ab  $T = 100^\circ\text{C}$  und bei Aluminiumlegierungen ab  $T = 50^\circ\text{C}$ :

$$\text{Stahl (außer nichtrostender Stahl) für } T < 350^\circ\text{C:} \quad (14)$$

$$n_T = 1 - 1,7 \cdot 10^{-3}(T/^\circ\text{C} - 100),$$

$$\text{Aluminium (nichtaushärtbar) für } T < 200^\circ\text{C:} \quad (15)$$

$$n_T = 1 - 4,5 \cdot 10^{-3}(T/^\circ\text{C} - 50).$$

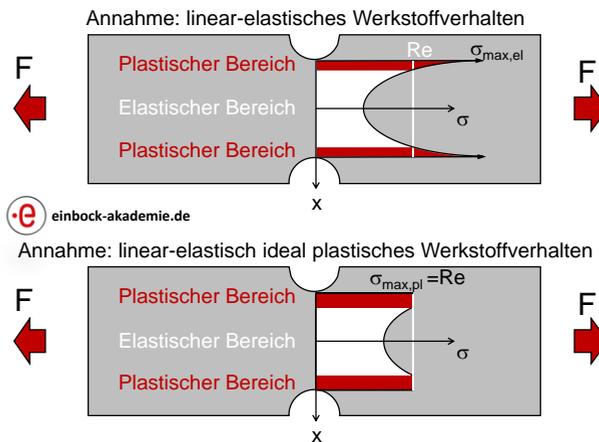


**ABBILDUNG 10: TEMPERATUREINFLUSS**

### 5.3 KERBEINFLUSS

Insbesondere bei gekerbten Bauteilen treten die maximalen Spannungen oftmals stark konzentriert in den Kerben auf. Überschreiten die Kerbspannungen die Streckgrenze, plastifiziert der Werkstoff lokal eng begrenzt. Mit einer globalen Verformung oder dem Versagen des Bauteiles ist deswegen nicht zu rechnen.

Abbildung 11 zeigt schematisch den Spannungsverlauf im Bauteil. Das obere Bild stellt den Spannungsverlauf bei Annahme des linear-elastischen Werkstoffverhaltens dar. Erkennbar ist, dass wegen der Kerbe nur ein kleiner Teil des Querschnittes plastische Verformungen aufweist, obwohl die maximalen Spannungen sehr deutlich oberhalb der Streckgrenze liegen. Im unteren Bild von Abbildung 11 ist der Spannungsverlauf bei Annahme des linearelastisch ideal-plastischen Werkstoffverhaltens schematisch skizziert. Da der Werkstoff bei Erreichen der Streckgrenze zu fließen beginnt, sind die maximalen Spannungen durch die Streckgrenze begrenzt. Der Flächeninhalt der roten und weißen Fläche ist proportional zur Kraft  $F$ . Deshalb vergrößern sich die plastischen Bereiche. Gleichzeitig nehmen die Spannungen im elastischen Bereich zu.



**ABBILDUNG 11: SPANNUNGSVERLAUF BEI PLASTIFIZIERUNGEN DES WERKSTOFFES**

Es werden die hoch beanspruchten (plastisch verformten) Bereiche des Bauteils durch die noch elastisch beanspruchten Bereiche gestützt. Für den Festigkeitsnachweis können deshalb für die höchst beanspruchte Stelle plastische Dehnungen zugelassen werden → Stützwirkung.

Es müssen dann jedoch zwei Versagenskriterien berücksichtigt werden (vgl. Tabelle 3). Da die Dehnungen zunehmen, muss das Bauteil zum einen gegen das Überschreiten einer maximal ertragbaren Dehnung  $\varepsilon_{ert}$  abgesichert werden. Zum anderen müssen zu große Verformungen vermieden werden, indem die Belastung kleiner ist als die Last, bei welcher der gesamte Querschnitt plastifiziert  $L_{vollplastisch}$ .

**TABELLE 3: VERSAGENSKRITERIEN BEI ÜBERELASTISCHER BEANSPRUCHUNG**

Versagenskriterium	Grenzwert	Kennzahl
Ertragbare Dehnung	$\varepsilon_{ert}$	$n_{pl} = \sqrt{E \cdot \varepsilon_{ert} / Re}$
Vollplastische Traglast	$L_{vollplastisch}$	$K_p = \frac{L_{vollplastisch}}{L_{elastisch}}$

Um diese Stützwirkung beim Festigkeitsnachweis zu berücksichtigen, wird die Streckgrenze  $Re$  um die plastische Stützzahl  $n_{pl}$  erhöht. Als ertragbare Beanspruchung gilt damit:

$$\sigma^*_{ert, Fließen} = Re \cdot n_{pl} \quad (16)$$

Die plastische Stützzahl berechnet sich wie folgt:

$$n_{pl} = \sqrt{E \cdot \varepsilon_{ert} / Re} \quad (17)$$

Es ist  $E$  der E-Modul des Werkstoffes und  $\varepsilon_{ert}$  die im Kerbgrund plastisch ertragbare Dehnung unter Annahme linear-elastischen Werkstoffverhaltens. Nach der FKM-Richtlinie [1] gelten die in Tabelle 4 angegebenen Werte für duktile Werkstoffe.

**TABELLE 4: ERTRAGBARE DEHNUNGEN [1]**

	Stahl, Stahlguss	GJS	GJM	Alu Knet- legierung	Alu Guss
$\varepsilon_{ert}$ in %	5	4	2	5	2
E-Modul in MPa	210 000	170 000	180 000	70 000	70 000
Für $Re < Re_{max}$	$Re_{max}$ in MPa				
	1150	750	400	400	150

Die Berechnung des plastischen Werkstoffverhaltens mittels FEM ist sehr aufwändig. Für den Festigkeitsnachweis wird deshalb weiterhin mit den linear-elastischen Spannungen gerechnet.

Es muss bei diesem Vorgehen abgesichert werden, dass die Belastung nicht soweit gesteigert wird, dass der gesamte Querschnitt plastifiziert (es liegen also keine elastischen Bereiche mehr vor). Diese Absicherung erfolgt durch die vollplastische Formzahl  $K_p$ :

$$K_p = \frac{L_{\text{vollplastisch}}}{L_{\text{elastisch}}} \quad (18)$$

$L_{\text{vollplastisch}}$  ist die vollplastische Traglast (z.B. für Abbildung 11 die Kraft), bei welcher der gesamte Querschnitt plastifiziert und  $L_{\text{elastisch}}$  die elastische Grenzlast bei der die Streckgrenze erreicht ist. Es gilt also  $\sigma_{\text{max}} = Re$ .

Tabelle 3 fasst die möglichen Versagenskriterien inkl. der Kennwerte bei überelastischer Beanspruchung noch einmal zusammen.

Die Berechnung der vollplastischen Formzahl ist aufwändig und kann beispielsweise mittels FEM oder analytisch erfolgen. Für einfache Querschnitte gelten nach der FKM-Richtlinie [1] die Werte aus Tabelle 5.

**TABELLE 5: VOLLPLASTISCHE FORMZAHLEN**

Querschnitt	Biegung $K_{p,b}$	Torsion $K_{p,t}$
Kreis	1,7	1,33
Kreisring (dünnwandig)	1,27	1
Rechteck	1,5	-

Um eine vollplastische Beanspruchung des Querschnitts zu vermeiden, wird der Festigkeitsnachweis stets mit dem Minimum aus plastischer Stützzahl  $n_{pl}$  und vollplastischer Formzahl  $K_p$  geführt.

Als ertragbare Beanspruchbarkeit gilt damit:

$$\sigma^*_{\text{ert,Fließen}} = Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p) \quad (19)$$

Mit  $K_p$  nach Tabelle 5 und

$$n_{pl} = \sqrt{E \cdot \varepsilon_{\text{ert}} / Re} \quad (20)$$

**Die Stützzahl  $n_{pl}$  ist immer größer eins. Damit bietet sich für geeignete Bauteile die Chance Tragreserven zu heben und höhere Lasten zuzulassen oder leichter zu bauen.**

## 6 BERECHNUNG DER SICHERHEIT (ZULÄSSIGE SPANNUNGEN)

Ganz allgemein ist die Sicherheit durch das Verhältnis aus Beanspruchbarkeit und Beanspruchung definiert:

$$\text{Sicherheit } S = \frac{\text{Beanspruchbarkeit}}{\text{Beanspruchung}}. \quad (21)$$

Um Versagen mit Sicherheit ausschließen zu können wird für die Bauteilauslegung ein zu erreichender Sicherheitsfaktor  $S_F$  (gegen Versagen durch Fließen) und  $S_B$  (gegen Versagen durch Bruch) vorgegeben. Abhängig von diesem Sicherheitsfaktor  $S$  und der Beanspruchbarkeit  $\sigma_{ert}$  (vgl. Kapitel 5) wird die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  als Grenzwert der tatsächlichen Beanspruchung berechnet:

$$\sigma_{zul,Fließen} = \frac{\sigma_{ert,Fließen}}{S_F} = \frac{Re}{S_F} \quad (22)$$

$$\sigma_{zul,Bruch} = \frac{\sigma_{ert,Bruch}}{S_B} = \frac{Rm}{S_B} \quad (23)$$

Übliche Sicherheitskennwerte für duktile Werkstoffe liefert z.B. die FKM-Richtlinie [1] abhängig von der Art des Versagens und der Schwere der Fehler, vgl. Tabelle 6.

TABELLE 6: SICHERHEITSAKTOREN FÜR DEN STATISCHEN FESTIGKEITSNACHWEIS

Obere Zeile: $S_B$ Untere Zeile: $S_F$		Schadensfolge		
		hoch	mittel	niedrig
Auftrittswahrscheinlichkeit der Kerbspannung	hoch	2,0 1,5	1,85 1,4	1,75 1,3
	niedrig	1,8 1,35	1,7 1,25	1,6 1,2

Folgende Randbedingungen sind unbedingt einzuhalten:

- an der zu bewertenden Stelle ist die Spannungsverteilung über den Querschnitt nicht konstant,
- der Werkstoff ist ausreichend duktil ( $A > 6\%$ ),
- der Werkstoff kriecht nicht,
- die Sicherheit gegen Bruch ist ausreichend hoch
- der Bereich plastischer Dehnungen lokal eng begrenzt

Der eigentliche Festigkeitsnachweis erfolgt dann durch den Vergleich der wirkenden Kerbspannungen  $\sigma_{max}$  mit den zulässigen Spannungen  $\sigma_{zul}$

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Flie\ddot{u}en} \quad (24)$$

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Bruch} \quad (25)$$

## 7 AUF DEN PUNKT

Die wichtigsten Erkenntnisse des statischen Nachweises auf den Punkt gebracht:

- Nutzen Sie Tragreserven, indem Sie gekerbte und duktile Bauteile um den Faktor der plastischen Stützzahl höher auslasten.
- Bauteilfestigkeiten hängen immer vom Werkstoff, der Umgebungsbedingung (Temperatur) und der Geometrie (Stützwirkung) ab.
- Vermeiden Sie Kerben so gut es geht oder entschärfen Sie diese so weit möglich. Ein ungekerbtes Bauteil hat immer die höchste Traglast.
- Beachten Sie, dass bei höherfesten Werkstoffen die Sprödigkeit und damit die Kerbempfindlichkeit steigt.
- Passen Sie Ihre Sicherheitsfaktoren an die Schadensfolge und die Eintrittswahrscheinlichkeit an.
- Sichern Sie Ihre Bauteile immer gegen Bruch und Fließen ab.
- Finden Sie Links zu Werkstoffdaten unter <http://einbock-akademie.de/download>.
- Berechnen Sie Formzahlen online auf der <http://www2.hs-esslingen.de/~stgreu/Formzahlen.html>
- Fragen Sie uns (kontakt@einbock-akademie.de), gerne behandeln wir interessante Fragen auf unserem Blog <http://einbock-akademie.de/blog>

## 8 WICHTIGE FORMELN

### Linearelastischer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung (Hookesches Gesetz)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

### Berechnung der Nennspannungen für Zug/Druck

$$\sigma_{Nenn,z} = F/A$$

### Biegung

$$\sigma_{Nenn,b} = M_b/W_b$$

### Torsion

$$\tau_{Nenn,t} = M_t/W_t$$

### Schub

$$\tau_{Nenn,s} = F/A$$

### Berechnung der Kerbspannungen:

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn}$$

### Neuber-Regel bei linearelastisch-idealplastischem Werkstoffverhalten

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{el} = Re \cdot \varepsilon_{pl}$$

### Ertragbare Spannungen (gegen Fließen)

$$\sigma^*_{ert,Fließen} = Re \cdot n_{pl}$$

### Plastische Stützzahl

$$n_{pl} = \sqrt{E \cdot \varepsilon_{ert}/Re}$$

### Vollplastische Formzahl

$$K_p = \frac{L_{vollplastisch}}{L_{elastisch}}$$

### Zulässige Spannungen gegen Fließen

$$\sigma_{zul,Fließen} = \frac{\sigma_{ert,Fließen}}{S_F} = \frac{Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p)}{S_F}$$

### gegen Bruch

$$\sigma_{zul,Bruch} = \frac{Rm}{S_B}$$

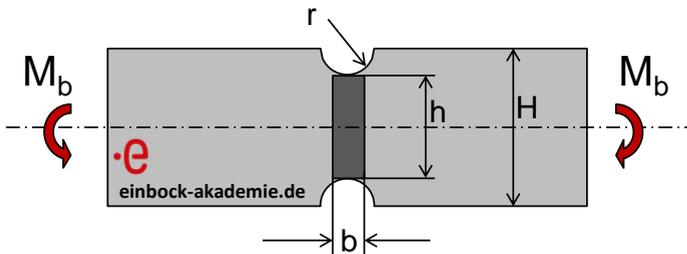
## 9 ÜBUNGEN

Sie möchten das in Abbildung 12 dargestellte Bauteil auslegen. Der Querschnitt des Bauteils ist ein Rechteck. Dieses wird durch ein Biegemoment  $M_b = 25 \text{ Nm}$  belastet. Der Werkstoff ist ein C15 normalgeglüht mit den folgenden Werkstoffdaten:

Zugfestigkeit  $R_m = 350 \text{ MPa}$ ,  
 Streckgrenze  $R_e = 230 \text{ MPa}$   
 E-Modul  $E = 210\,000 \text{ MPa}$   
 Bruchdehnung  $A = 26 \%$

Die geometrischen Abmaße sind:

Radius  $r = 1 \text{ mm}$   
 Bauteildicke  $b = 5 \text{ mm}$   
 Höhe  $H = 22 \text{ mm}$   
 Höhe  $h = 20 \text{ mm}$



**ABBILDUNG 12 GEKERBTES BAUTEIL UNTER BIEGUNG**

- Bestimmen Sie die für diesen Fall gültige Formzahl des Bauteils.
- Berechnen Sie die maximale Spannung im Bereich der Kerbe.
- Skizzieren Sie grob den Spannungsverlauf der Nenn- und Kerbspannungen über den Querschnitt im Bereich der Kerbe.
- Ermitteln Sie die Sicherheit nach dem konventionellen Festigkeitsnachweis gegen Fließen und Bruch und bewerten Sie diese.
- Diskutieren Sie ob das Bauteil höher ausgelastet werden dürfte.
- Wie hoch liegt die Sicherheit, wenn plastische Dehnungen von  $\varepsilon_{ert} = 5 \%$  zugelassen werden?
- Überlegen Sie Maßnahmen, wie Sie das übertragbare Moment weiter steigern könnten. Die Maße  $b$ ,  $h$  und  $H$  seien feste Größen.

# 10 LÖSUNGEN

Zu a) Berechnung der Formzahl  $K_t$

Nach den Gleichungen in Abbildung 7 von Seite 18 ist

$$K_{t,b} = 3,065 - 6,269 \cdot \frac{2r}{H} + 7,015 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^2 - 2,812 \cdot \left(\frac{2r}{H}\right)^3$$

$$K_{t,b} = 3,065 - 6,269 \cdot \frac{2 \cdot 1\text{mm}}{22\text{mm}} + 7,015 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1\text{mm}}{22\text{mm}}\right)^2 - 2,812 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1\text{mm}}{22\text{mm}}\right)^3$$

$$K_{t,b} = 2,55$$

**Die Formzahl dieses Bauteils ist  $K_{t,b} = 2,55$**

Zu b) Berechnung der maximalen Kerbspannung  $\sigma_{max,b}$  im Bereich der Kerbe:

Schritt 1: Berechnung der Nennspannung nach Abbildung 5 von Seite 16

$$\sigma_{nenn,b} = \frac{M_b}{W_b}$$

mit dem Widerstandsmoment gegen Biegung  $W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$  nach Abbildung 6 von 17 gilt

$$\sigma_{nenn,b} = \frac{M_b}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{25\text{ Nm}}{\frac{5\text{mm} \cdot (20\text{mm})^2}{6}}$$

$$\sigma_{nenn,b} = 75\text{ MPa}$$

Die Nennspannung beträgt  $\sigma_{nenn,b} = 75\text{ MPa}$ .

Schritt 2: Berechnung der maximalen Kerbspannung  $\sigma_{max,b}$  nach Gleichung (4) von Seite 19

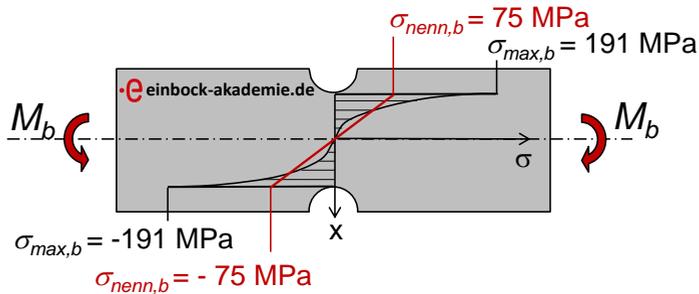
$$\sigma_{max,b} = K_t \cdot \sigma_{nenn,b}$$

$$\sigma_{max,b} = 2,55 \cdot 75\text{ MPa}$$

$$\sigma_{max,b} = 191\text{ MPa}$$

**Die maximale Kerbspannung beträgt  $\sigma_{max,b} = 191\text{ MPa}$ .**

Zu c) Skizze für den Spannungsverlauf der Nenn- und Kerbspannung.



**ABBILDUNG 13: SCHEMATISCHER VERLAUF DER NENN- UND KERBSPANNUNGEN**

Zu d) Ermittlung der Sicherheiten  $S_F$  gegen Fließen und  $S_B$  gegen Bruch

Nach Gleichung (24) und (25) von Seite 30 ist

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Flie\beta en}$$

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Bruch}$$

Die Sicherheit  $S_F$  gegen Fließen wird durch Einsetzen von Gleichung (22) Seite 29 in Gleichung (24) Seite 30 bestimmt

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Flie\beta en} = \frac{Re}{S_F}$$

$$K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \frac{Re}{S_F}$$

$$S_F = \frac{Re}{K_t \cdot \sigma_{nenn}} = \frac{230 \text{ MPa}}{2,55 \cdot 75 \text{ MPa}}$$

$$S_F = 1,2$$

**Die Sicherheit gegen Fließen ist  $S_F = 1,2$ .**

Auf gleiche Art wird die Sicherheit  $S_B$  gegen Bruch mit den Gleichungen (25) und (23) gefunden

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Bruch} = \frac{Rm}{S_B}$$

$$K_t \cdot \sigma_{nenn} = \frac{Rm}{S_B}$$

$$S_B = \frac{Rm}{K_t \cdot \sigma_{nenn}} = \frac{350\text{MPa}}{2,55 \cdot 75\text{MPa}}$$

$$S_B = 1,83$$

**Die Sicherheit gegen Bruch ist  $S_B = 1,83$ .**

Bewertung der Sicherheiten

Nach Tabelle 6 der Seite 29 gilt für die Sicherheiten

$S_F = 1,2$  ausreichend für **niedrige Schadensfolgen** und

**geringe Auftretenswahrscheinlichkeiten** der maximalen Kerbspannungen

$S_B = 1,83$  ausreichend für **hohe Schadensfolgen** und

**geringe Auftretenswahrscheinlichkeiten** der maximalen Kerbspannungen.

Fazit: die Sicherheit gegen Fließen begrenzt die Bauteilauslegung. Sie ist sehr niedrig. In Summe ist die Auslegung des Bauteils deshalb nur für **niedrige Schadensfolgen** und **geringe Auftretenswahrscheinlichkeiten** sicher, siehe Seite 29.

Zu e) Diskussion zur höheren Auslastung des Bauteils

Die Sicherheiten gegen Fließen begrenzen die Sicherheit des Bauteils. Deshalb dürfte das Bauteil durch zulassen von plastischen Dehnungen im Kerbgrund höher ausgelastet werden. Vorausgesetzt die Randbedingungen von Seite 30 nach Kapitel 6 werden eingehalten:

- an zu bewertenden Stellen ist die Spannungsverteilung über den Querschnitt nicht konstant  
→ ist gegeben, siehe Spannungsverlauf der Skizze
- Werkstoff ist ausreichend duktil ( $A > 6\%$ )  
→ ist gegeben, da  $A = 23\% > 6\%$
- der Bereich plastischer Dehnungen lokal eng begrenzt  
→ ist gegeben, siehe Spannungsverlauf der Skizze

**Die Randbedingungen sind erfüllt. Damit darf das Bauteil höher ausgelastet werden, indem plastische Dehnungen im Kerbgrund zugelassen werden. Zu beachten ist, dass nach Gleichung (19) von Seite 28 nur mit dem Minimum aus plastischer Stützzahl  $n_{pl}$  und vollplastischer Tragzahl  $K_p$  gerechnet werden darf.**

Zu f) Berechnung der Sicherheit  $S_F$  gegen Fließen für  $\varepsilon_{ert} = 5 \%$ :

Mit Gleichung (24) von Seite 30

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Fließen}$$

und Gleichung (19) von Seite 28 gilt für beim Zulassen plastischer Dehnungen im Kerbgrund für die zulässige Spannung gegen Fließen  $\sigma_{zul,Fließen}$ :

$$\sigma_{zul,Fließen} = \frac{\sigma_{ert,Fließen}}{S_F} = \frac{Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p)}{S_F}$$

Mit der plastischen Stützzahl  $n_{pl}$  nach Gleichung (20), Seite 28

$$n_{pl} = \sqrt{E \cdot \frac{\varepsilon_{ert}}{Re}} = \sqrt{\frac{210\,000 \text{ MPa} \cdot 0,05}{230 \text{ MPa}}}$$

$$n_{pl} = 6,76$$

und der vollplastischen Formzahl  $K_p$  nach Tabelle 5 für Rechteckquerschnitte  $K_p = 1,5$

Es gilt der kleinere Wert der beiden Kennwerte ( $\text{MIN}(n_{pl}; K_p)$ ):

$$\text{MIN}(n_{pl}; K_p) = \text{MIN}(6,76; 1,5)$$

$$\text{MIN}(n_{pl}; K_p) = 1,5$$

Es erfolgt die Berechnung der Sicherheit  $S_F$  durch Einsetzen von (19) in (24):

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nenn} \leq \sigma_{zul,Fließen} = \frac{Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p)}{S_F}$$

$$K_t \cdot \sigma_{nenn} = \frac{Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p)}{S_F}$$

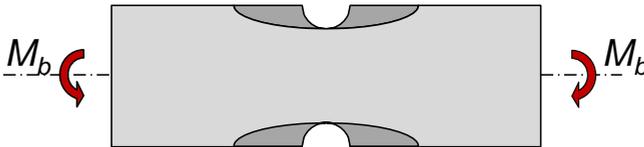
$$S_F = \frac{Re \cdot \text{MIN}(n_{pl}; K_p)}{K_t \cdot \sigma_{nenn}} = \frac{230 \text{ MPa} \cdot 1,5}{2,55 \cdot 75 \text{ MPa}}$$

$$S_F = 1,80$$

**Die Sicherheit gegen Fließen liegt bei  $S_F = 1,80$ .**

Zu g) Maßnahmen zur weiteren Steigerung der Belastung

Wegen der hohen Formzahl  $K_t = 2,55$  lohnt es sich über eine **Verringerung der Kerbschärfe** nachzudenken. Da die Maße  $b$ ,  $h$  und  $H$  fest vorgegeben sind, ist eine reine Vergrößerung des Radius  $r$  nicht möglich. Alternativ können aber z.B. elliptische Kerben anstelle der Radien verwendet werden. Diese Maßnahmen sind meist ohne Mehrkosten erreichbar.



**ABBILDUNG 14: ENTSCHÄRFUNG DER KERBEN**

Alternativ kann auch über eine **Wärmebehandlung des Werkstoffes** nachgedacht werden. Durch eine Härtung kann dieser Werkstoff folgende Werkstoffdaten erreichen:

Zugfestigkeit	$R_m = 740 \text{ MPa}$ ,
Streckgrenze	$R_e = 440 \text{ MPa}$
E-Modul	$E = 210\,000 \text{ MPa}$
Bruchdehnung	$A = 12 \%$

In diesem Fall wäre der Werkstoff immer noch sehr duktil. Es ist allerdings durch die Wärmebehandlung mit Mehrkosten zu rechnen.

Natürlich kann auch ein **anderer Werkstoff** eingesetzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass Werkstoffe oftmals zusätzliche Funktionen (z.B. Schweißbarkeit, Korrosionsbeständigkeit, Stanzbarkeit, ...) erfüllen müssen und deshalb nicht ohne weiteres geändert werden können. Eine Änderung des Werkstoffes bringt außerdem meist höhere Kosten mit sich.

**Reduzieren Sie die Sicherheitsfaktoren**, durch z.B. regelmäßige Inspektionen oder indem Sie Redundanzen einbauen, d.h. der Ausfall dieses Bauteiles nicht zum Ausfall der Konstruktion führt und Sie diesen Ausfall sicher detektieren.

# 11 FORMELZEICHEN

## Belastungsgrößen

$F$	Kraft [N]
$M_b$	Biegemoment [Nm]
$M_t$	Torsionsmoment [Nm]

## Geometriegrößen

$A$	Querschnittsfläche [mm <sup>2</sup> ]
$h$	Höhe [mm]
$H$	Höhe [mm]
$r$	Radius [mm]
$b$	Breite [mm]
$d$	Durchmesser [mm]
$D$	Durchmesser [mm]

## Lebensdauergrößen

$n$	Wirkende Zyklenzahl [-]
$N$	Ertragbare Zyklenzahl [-]
$i$	Laufindex [-]
$d$	Teilschädigung [-]
$D$	Gesamtschädigung [-]

## Werkstoffkennwerte

$A$	Bruchdehnung in [%]
$R_e$	Streckgrenze [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$R_m$	Zugfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$E$	E-Modul [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\varepsilon_{ert}$	ertragbare plastische Dehnung [%]

---

$L_{elastisch}$	elastische Grenzlast
$L_{vollplastisch}$	vollplastische Traglast
$K_p$	plastische Formzahl [-]

**Beanspruchungsgrößen**

$\sigma_{zul}$	zulässige (Normal-) spannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\tau_{zul}$	zulässige Schubspannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\sigma_{ert}$	ertragbare (Normal-) spannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\tau_{ert}$	ertragbare Schubspannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\sigma_{max}$	maximale (Normal-) spannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$\sigma_{nenn}$	maximale Schubspannung [N/mm <sup>2</sup> ] oder [MPa]
$S_B$	Sicherheit gegen Bruch [-]
$S_F$	Sicherheit gegen Fließen [-]
$K_t$	Formzahl [-]

## 13 LITERATURVERZEICHNIS

- [1] FKM-Richtlinie, Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile: FKM-Richtlinie, 11 Hrsg., Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), 2012.
- [2] W. C. Young und R. G. Budynas, Roark's Formulas for Stress and Strain, New York: McGraw-Hill, 2002.
- [3] F. Richtlinie, Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile: FKM-Richtlinie, 11 Hrsg., Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), 2012.
- [4] H. Neuber, „Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen.“ *Konstruktion* 20, pp. 245-251, 7 1968.
- [5] B. Langer, Fatigue Failure from Stress-Cycles of Varying Amplitude., ASME 59, 1937.
- [6] M. A. Miner, Cumulative damage in fatigue fracture. Journal of Applied Mechanics., Bd. 12, Journal of Applied Mechanics, 1945, pp. 159-164.
- [7] A. Palmgren, „Die Lebensdauer von Kugellagern,“ *VDI-Zeitschrift*, Nr. 58, pp. 339-341, 1924.
- [8] Z. H. Gudehus H., Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung: Empfehlungen zu Lebensdauerabschätzung von Maschinenbauteilen, Verein z. Förderung d. Forschung und d. Anwendung und von Betriebsfestigkeitskenntnissen in d. Eisenhüttenindustrie, 1999.
- [9] W.-U. Zammert, „Statistische Planung und Auswertung technischer Versuchsreihen,“ Vorlesungsunterlagen, FH Esslingen, 1994.
- [10] G. Lienert, Testaufbau und Testanalyse, Weinheim: Psychologie-Verl.-Union,, 1994 - 5., völlig Neubearb. und erw. Aufl. Beltz.

- [11] K.-G. Eulitz, Beurteilung der Zuverlässigkeit von Lebensdauervorhersagen nach dem Nennspannungskonzept und dem Örtlichen Konzept anhand einer Sammlung von Betriebsfestigkeitsversuchen., TU Dresden: Habilitaion, 1999.
- [12] L. Sachs, Angewandte Statistik, Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- [13] C. F. Gauß:, Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Göttingen , 1809.
- [14] E. Haibach, Betriebsfestigkeit Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung, Berling Heidelberg: Springer Verlag, 2002.
- [15] B. Bertsche und G. Lechner, Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 3. Auflage.

---

## 14 INDEX

### B

Beanspruchbarkeit.....	10, 24
Beanspruchung.....	10
Belastung.....	10
Bruchdehnung.....	15

### D

Datenbanken.....	15
Dehnung.....	12

### E

E-Modul.....	14
Ersatzstreckgrenze.....	13

### F

Formzahl.....	19
---------------	----

### G

Gestaltänderungsenergiehypothese.....	21
---------------------------------------	----

### H

Hookesches Gesetz.....	14
------------------------	----

### K

Kerbspannungen.....	19
---------------------	----

### N

Nennspannungen.....	16
Neuber.....	22
Neuber-Hyperbel.....	22
Normalspannungshypothese.....	21

---

## P

plastische Dehnung.....	23
plastische Stützzahl.....	27, 37

## S

Sicherheit.....	10
Spannung.....	12
Streckgrenze.....	13

## V

vollplastische Formzahl .....	28
-------------------------------	----

## W

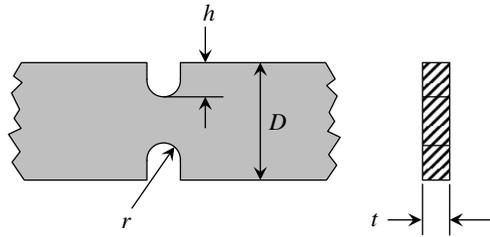
Widerstandsmomente.....	17
-------------------------	----

## Z

Zugfestigkeit.....	15
Zugversuch.....	12

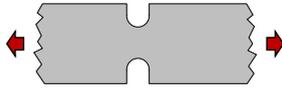
## 15 ANHANG FORMZAHLEN (AUSZUG)

1) Beidseitig U-förmig gekerbte Platte [1]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Zug/Druck



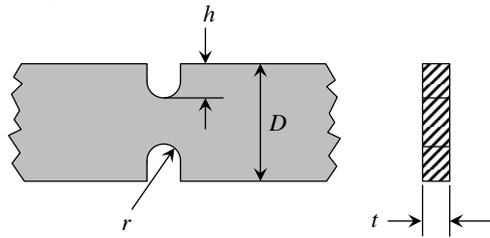
Mit folgenden Konstanten:

	$0,1 \leq h/r \leq 2,0$	$2,0 \leq h/r \leq 50,0$
$C_1$	$0,850 + 2,628\sqrt{h/r} - 0,413h/r$	$0,833 + 2,069\sqrt{h/r} - 0,009h/r$
$C_2$	$-1,119 - 4,826\sqrt{h/r} + 2,575h/r$	$2,732 - 4,157\sqrt{h/r} + 0,176h/r$
$C_3$	$3,563 - 0,514\sqrt{h/r} - 2,402h/r$	$-8,859 + 5,327\sqrt{h/r} - 0,320h/r$
$C_4$	$-2,294 + 2,713\sqrt{h/r} + 0,240h/r$	$6,294 - 3,239\sqrt{h/r} + 0,154h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

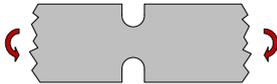
$$K_t = 3,065 - 3,370 \left(\frac{2h}{D}\right) + 0,647 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + 0,658 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

## 1) Beidseitig U-förmig gekerbte Platte [1]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Biegung



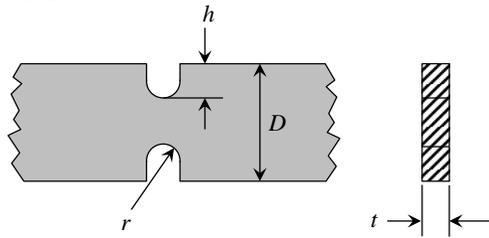
Mit folgenden Konstanten:

	$0,25 \leq h/r \leq 2,0$	$2,0 \leq h/r \leq 50,0$
$C_1$	$0,723 + 2,845\sqrt{h/r} - 0,504h/r$	$0,833 + 2,069\sqrt{h/r} - 0,009 h/r$
$C_2$	$-1,836 - 5,746\sqrt{h/r} + 1,314h/r$	$0,024 - 5,383\sqrt{h/r} + 0,126 h/r$
$C_3$	$7,254 - 1,885\sqrt{h/r} + 1,646h/r$	$-0,856 + 6,460\sqrt{h/r} - 0,199 h/r$
$C_4$	$-5,140 + 4,785\sqrt{h/r} - 2,456h/r$	$0,999 - 3,146\sqrt{h/r} + 0,082 h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

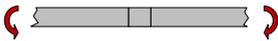
$$K_t = 3,065 - 6,269 \left(\frac{2h}{D}\right) + 7,015 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 2,812 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

## 1) Beidseitig U-förmig gekerbte Platte [1]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Torsion



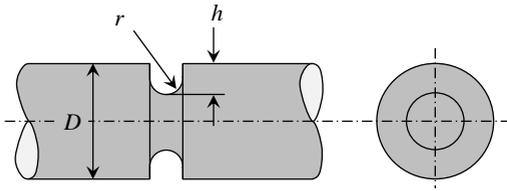
Mit folgenden Konstanten:

	$0,25 \leq h/r \leq 4,0$ und $h/t$ ist groß
$C_1$	$1,031 + 0,831\sqrt{h/r} + 0,014 h/r$
$C_2$	$-1,227 - 1,646\sqrt{h/r} + 0,117 h/r$
$C_3$	$3,337 - 0,750\sqrt{h/r} + 0,469 h/r$
$C_4$	$-2,414 + 1,566\sqrt{h/r} - 0,600 h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

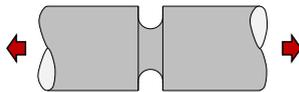
$$K_t = 1,876 - 2,756 \left(\frac{2h}{D}\right) + 3,056 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 1,175 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

## 7) Welle mit umlaufender U-förmiger Kerbe [4]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Zug/Druck



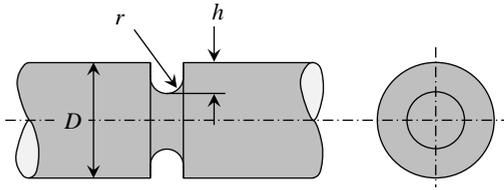
Mit folgenden Konstanten:

	$0,25 \leq h/r \leq 2,0$	$2,0 \leq h/r \leq 50,0$
$C_1$	$0,455 + 3,354\sqrt{h/r} - 0,769 h/r$	$0,935 + 1,922\sqrt{h/r} + 0,004 h/r$
$C_2$	$3,129 - 15,955\sqrt{h/r} + 7,404 h/r$	$0,537 - 3,708\sqrt{h/r} + 0,040 h/r$
$C_3$	$-6,909 + 29,286\sqrt{h/r} - 16,104 h/r$	$-2,538 + 3,438\sqrt{h/r} - 0,012 h/r$
$C_4$	$4,325 - 16,685\sqrt{h/r} + 9,469 h/r$	$2,066 - 1,652\sqrt{h/r} - 0,031 h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

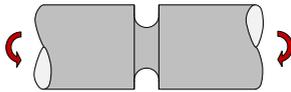
$$K_t = 3,04 - 5,42 \left(\frac{2h}{D}\right) + 6,27 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 2,89 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

## 7) Welle mit umlaufender U-förmiger Kerbe [4]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Biegung



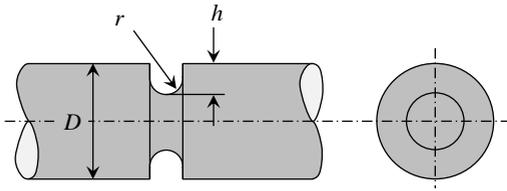
Mit folgenden Konstanten:

	$0,25 \leq h/r \leq 2,0$	$2,0 \leq h/r \leq 50,0$
$C_1$	$0,455 + 3,54\sqrt{h/r} - 0,769 h/r$	$0,935 + 1,922\sqrt{h/r} + 0,004 h/r$
$C_2$	$0,891 - 12,721\sqrt{h/r} + 4,593 h/r$	$-0,552 - 5,327\sqrt{h/r} + 0,086 h/r$
$C_3$	$0,286 + 15,481\sqrt{h/r} - 6,392 h/r$	$0,754 + 6,281\sqrt{h/r} - 0,121 h/r$
$C_4$	$-0,632 - 6,115\sqrt{h/r} + 2,568 h/r$	$-0,138 - 2,876\sqrt{h/r} + 0,031 h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

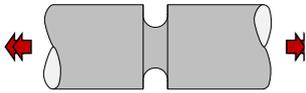
$$K_t = 3,04 - 7,236 \left(\frac{2h}{D}\right) + 9,375 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 4,179 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

## 7) Welle mit umlaufender U-förmiger Kerbe [4]



$$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

Belastung: Torsion



Mit folgenden Konstanten:

	$0,25 \leq h/r \leq 2,0$	$2,0 \leq h/r \leq 50,0$
$C_1$	$1,245 + 0,264\sqrt{h/r} + 0,491 h/r$	$1,651 + 0,614\sqrt{h/r} + 0,040 h/r$
$C_2$	$-3,030 + 3,269\sqrt{h/r} - 3,633 h/r$	$-4,794 - 0,314\sqrt{h/r} - 0,217 h/r$
$C_3$	$7,199 - 11,286\sqrt{h/r} + 8,318 h/r$	$8,457 - 0,962\sqrt{h/r} + 0,389 h/r$
$C_4$	$-4,414 + 7,753\sqrt{h/r} - 5,176 h/r$	$-4,314 + 0,662\sqrt{h/r} - 0,212 h/r$

Für  $h/r = 1$  (halbkreisförmige Kerbe) gilt

$$K_t = 2,000 - 3,394 \left(\frac{2h}{D}\right) + 4,231 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 1,837 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$